

Epreuve :
MATHEMATIQUES

Devoir de synthèse
N°2

Commissariat régional
Tunis 1

13 Mars 2024

Sujet commun

Durée : 3 h

Niveau : 4^{ème} Année

**Section:
Sciences expérimentales**

Le sujet comporte 5 pages dont l'annexe page 5 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1: (4 points)

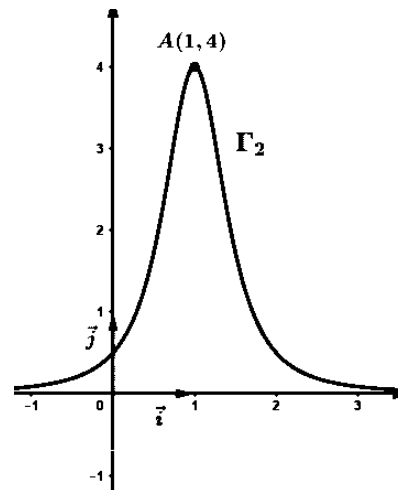
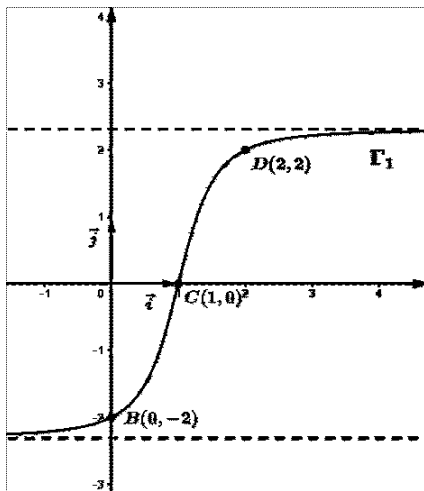
Pour chacune des questions suivantes, indiquer sur votre copie le numéro de la question puis répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x^2 + 2x) = 0$

2) Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$; On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 1$

3) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que sa fonction dérivée f' soit continue sur \mathbb{R} , et G une primitive de f définie sur \mathbb{R} .

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , deux courbes Γ_1 et Γ_2 dont l'une est celle de f et l'autre est celle de G .



a) Γ_1 est la courbe représentative de G

b) $\int_0^1 x f'(x) dx = 6$

c) La valeur moyenne sur $[0, 2]$ de la fonction g définie par : $g(x) = f(x)G(x)$ est nulle.

Exercice N°2: (3.5 points)

Un magasin vend des microscopes. Il s'adresse exclusivement à trois fournisseurs F_1, F_2 et F_3 . Dans ce magasin, tous les microscopes sont regroupés dans un stock unique.

La moitié des microscopes est produite par F_1 , le tiers par F_2 et le reste par F_3

Une étude statistique a montré que :

- 5% des microscopes produits par F_1 présente un défaut de fabrication.
- 2% des microscopes produits par F_2 présente un défaut de fabrication.
- Sur l'ensemble du stock, 4% des microscopes présente un défaut de fabrication.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles

1) On choisit un microscope au hasard et on considère les événements suivants :

F_1 : « le microscope est produit par F_1 »

F_2 : « le microscope est produit par F_2 »

F_3 : « le microscope est produit par F_3 »

D : « le microscope choisi présente un défaut »

a) Calculer $p(F_3)$; $p(F_1 \cap D)$ et $p(F_2 \cap D)$

b) En déduire que la probabilité que le microscope choisi soit produit par le fournisseur

F_3 et présente un défaut est égale à $\frac{1}{120}$

2) Un laborantin achète au hasard un microscope et constate qu'il présente un défaut.

Calculer la probabilité que ce microscope ne soit pas produit par le fournisseur F_3

3) Un laboratoire d'analyses médicales a commandé trois microscopes.

On suppose que le stock des microscopes du magasin est suffisamment grand pour assimiler le choix des microscopes à des tirages indépendants.

Calculer la probabilité de l'évènement :

A : « Au moins un des trois microscopes commandés est défectueux »

Exercice N°3: (6 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les points $A(-1,1,1)$; $B(1, -1,0)$; $C(1,0,1)$ et $D(1, -2,0)$

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C

est : $x + 2y - 2z + 1 = 0$

2) Vérifier que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume

3) Soit Q le plan perpendiculaire au plan P et contenant (AB)

a) Justifier que $\vec{u} \wedge \vec{AB}$ est un vecteur normal à Q

b) Montrer alors qu'une équation de Q est : $2x + y + 2z - 1 = 0$

4) Soit Γ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 3 = 0$$

a) Montrer que Γ est la sphère de centre C et passant par A.

b) Déterminer $\Gamma \cap P$

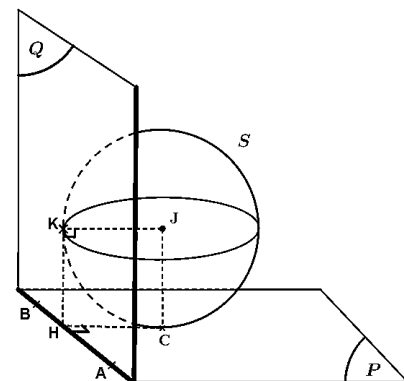
c) Montrer que Q coupe Γ suivant un cercle \mathcal{C} dont on précisera le rayon et les coordonnées de son centre H.

5) Dans cette question, on se propose de déterminer l'ensemble des sphères passant par le point C et tangentes aux plans P et Q.

Pour cela on désigne par :

- J le centre d'une sphère S de cet ensemble.
- K le projeté orthogonal du point J sur Q.

(figure ci-contre)



a) Montrer que le quadrilatère $JCHK$ est un carré.

b) Déduire qu'il existe deux sphères S_1 et S_2 passant par C et tangentes aux plans P et Q dont on précisera pour chacune le centre et le rayon

Exercice N°4: (6.5 points)

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a tracé \mathcal{E}_g la courbe représentative de la fonction

$$g \text{ définie sur } [0, +\infty[\text{ par : } \begin{cases} g(x) = \frac{x \ln x - x - 1}{(x+1)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

et \mathcal{E}_h la courbe représentative de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{1}{x}$

La courbe \mathcal{E}_g coupe l'axe (O, \vec{i}) en un seul point d'abscisse $a > 0$. (Voir annexe)

1) Par lecture graphique, déterminer le signe de $g(x)$ pour tout $x \geq 0$

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x+1}$

On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-g(x)}{x}$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution x_0 dans $]0, +\infty[$

et que $0,2 < x_0 < 0,3$

3) a) Vérifier que $f(x) - h(x) = h(x) g(x)$ ($x > 0$)

b) Étudier la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_h

c) Construire alors le point $A(a, f(a))$

4) a) Soit (T) la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

Tracer (T) et \mathcal{C}_f dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j})

b) On désigne par \mathcal{A} l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_g , \mathcal{C}_f et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$

Montrer que : $\mathcal{A} = a$

5) On pose la fonction k définie sur $]0, +\infty[$ par : $k(x) = 1 - f(x)$

et soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 k(x) dx$, ($n \geq 1$)

a) Pour $n \geq 2$, donner une interprétation graphique de u_n .

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a : $-\frac{\ln x}{2} \leq k(x) \leq -\ln x$

d) En déduire que : $\frac{1}{2} - \frac{1+\ln(n)}{2n} \leq u_n \leq 1 - \frac{1+\ln(n)}{n}$; pour $n \geq 1$

e) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente.

Donner un encadrement de sa limite ℓ .

Annexe à rendre avec la copie

Nom Prénom Classe : N°.....

Exercice N°4 :

